Principaux résultats scientifiques

Présentation générale

Mes recherches se situent en combinatoire énumérative et algébrique, en relation et interaction avec d'autres parties des mathématiques pures et appliquées, l'informatique fondamentale, la physique théorique, la biologie moléculaire et l'automatique.

1. Algèbre de Lie et combinatoire

C'était le thème de ma thèse d'Etat [1], 1975, sous la direction de M.P.Schützenberger, Membre de l'Institut (rapporteur Pierre Cartier). Il s'agit d'une théorie combinatoire des bases des algèbres de Lie libres et plus généralement des familles basiques pour les décompositions en somme directe de sous-algèbres de Lie (libres). Cette théorie, basée sur la notion combinatoire de factorisations dans les monoïdes libres, unifie et étend toutes les études et constructions antérieures.

2. Déterminants et configurations de chemins plans

Avec I. Gessel j'ai donné une méthodologie permettant d'interpréter certains déterminants par des configurations de chemins valués non intersectant [8]. Cette méthodologie a été utilisée depuis dans des centaines d'articles sous le nom de Lemme LGV (Linström-Gessel-Viennot). Elle peut s'appliquer dans une multitude de situations aussi bien dans la théorie des fonctions symétriques (identité de Jacobi-Trudi), la théorie des polynômes orthogonaux (déterminant de Hankel de moments, processus de vie et de mort de Karlin-McGregor), en physique statistique (les «vicious walkers» de Fisher) ou encore en chimie théorique avec le dénombrement de certains couplages. Nous avons étendu les résultats exposés par Fisher (lecture relative à la remise de sa médaille Boltzman) à des modèles beaucoup plus difficiles (articles [17] avec Guttmann et Krattenthaler, combinant LGV avec la combinatoire des caractères symplectiques du groupe symétrique).

3. Théorie combinatoire des empilements de pièces, physique statistique et gravitation quantique

J'ai introduit et développé une théorie combinatoire dite des «empilements de pièces» [10]. Elle est liée à la théorie algébrique des monoïdes de commutation introduits par P. Cartier et D. Foata et a des retombées diverses et importantes en physique théorique, notamment elle permet de résoudre simplement toutes les conjectures qui avaient été formulées par les physiciens sur le modèle dit des animaux dirigés, lié en physique statistique à la percolation dirigée et aux modèles de gaz durs. D'autre part, elle a eu des retombées récentes en gravitation quantique dans l'approche avec les triangulations dynamiques Lorentziennes de l'espace-temps (Loll, Ambjorn, Di Francesco, etc ..). J'ai étendu ces études dans [18] pour des triangulations sans effet de bord, ce qui complique considérablement les séries génératrices associées, qui ne sont ni algébriques, ni même polynomialement récursive et montre la sensibilité du modèle aux effets de bord.

J'ai utilisé la théorie des empilements de pièces comme modèle de base pour développer la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux (ou formels). Un corollaire est par exemple de donner une preuve combinatoire (bijective) d'une formule de G. Andrews donnant une forme «réciproque» des fameuses identités de Rogers-Ramanujan.

Signalons que la théorie a conduit à d'importants développements en algèbre et théorie des groupes, avec les travaux de J.Stembridge sur les classes totalement commutatives des groupes de Coxeter et une classification par R. Green des empilements acycliques, qui est parallèle à celle des systèmes de racines. Très récemment R.Kadem et P. Di Francesco ont utilisé cette théorie des empilements pour démontrer une conjecture importante de Fomin et Zelevinsky sur la positivité dans les algèbres à grappes («cluster algebra»).

4. Théorie combinatoire combinatoire des polynômes orthogonaux et extensions

En relation avec la théorie combinatoire des fractions continues analytiques de P.Flajolet, j'ai donné une théorie combinatoire complète des polynômes orthogonaux formels (généraux) basée sur la théorie des empilements de pièces (voir §3), ou des chemins valués du plan. C'est la monoraphie [5]: orthogonalité, moments, déterminants de Hankel, interprétation des coefficiens de linéarisation pour les polynômes de Hermite, Laguerre et Tchebycheff, théorie combinatoire des polynômes orthogonaux de Scheffer (Hermite, Laguerre, Charlier, Meixner, Meinxner-Pollazeck), extension aux approximants de Padé, interprétation combinatoire de l'algorithme quotient-différence en analyse numérique.

Avec D.Stanton et M.Ismail, j'ai donné en [11] une interprétation combinatoire et une preuve combinatoire de la formule donnant la fameuse intégrale de Askey-Wilson, liée à l'orthogonalité des polynômes d'Askey-Wilson, qui sont les polynômes orthogonaux les plus généraux dans la classification des polynômes orthogonaux classiques. Cette évaluation repose sur une étude combinatoire des q-analogues des polynômes d'Hermite. J'ai aussi développé la partie «q-analogue», «q-séries» de cette théorie (q-Laguerre, etc),

5. Interprétation combinatoire de nombres classiques et fonctions spéciales

J'ai donné des interprétations combinatoires de nombres classiques (tangent, sécant ou nombres d'Euler, nombres de Genocchi proches des nombres de Bernoulli, etc ..) et développé une théorie combinatoire, conduisant en particulier à une interprétation combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi [4]. Cette théorie développe la combinatoire du groupe symétrique (permutations, arbres binaires croissants, etc) et est liée à notre théorie combinatoire des équations différentielles (voir §7). Des retombées de ces développements ont été de démontrer une conjecture de M.P.Schützenberger et D.Foata sur une propriété d'équidistribution des permutations ayant une forme («up-down sequence») donnée, ainsi que la première preuve «bijective» de la formule de R.Graham et al. donnant le nombre de permutations de Baxter.

6. Tableaux de Young, fonctions symétriques et correspondance de Robinson-Schensted

La correspondance RSK (Robinson-Schensted-Knuth) est un outil fondamental en combinatoire algébrique et en théorie des représentations des groupes, en particulier le groupe symétrique. C'est une bijection entre les permutations et les paires de tableaux de Young de même forme. J'ai introduit en [2] une version géométrique de la correspondance avec des «ombres» et «éclairage». J'ai introduit la notion de «bonne (i,j)-grille» permettant de donner une définition «locale» de la correspondance. Cette construction a été reprise, étendue et utilisée dans de nombreux travaux. J'ai développé ce modèle dans le domaine des fonctions symétriques, fonctions de Schur, en relation avec le lemme LGV sur les chemins ne se recoupant pas (voir §2), les empilements de pièces et la combinatoire de l'algèbre de Temperley-Lieb.

7. Théorie combinatoire des équations différentielles, du calcul intégral et automatique non-linéaire

Avec P. Leroux, nous avons développé une théorie combinatoire des équations différentielles générale $y' = f(y,t)$ (ou des systèmes d'équations), avec $f(y,t)$ fonction analytique, en utilisant certaines familles d'arborescences croissantes enrichies (c'est-à-dire qu'il y a une structure combinatoire interprétant la fonction f, sur les fils de tout sommet, au sens de la théorie des espèces de structures de A. Joyal). Pour des exemples précis et des calculs effectifs, les arborescences deviennent des arbres croissants colorés, pondérés. Cette théorie est liée à celle de J.Butcher, et aux algèbres de Hopf sous-jacentes aux méthodes numériques de Runge-Kutta, algèbres isomorphes à celle bien connues de Connes-Kreimer pour la renormalisation quantique relatives aux diagrammes de Feynman.

L'intérêt de cette approche combinatoire est d'avoir du même coup une approche combinatoire des équations différentielles en régime forcé venant de l'automatique non linéaire. La solution de l'équation est alors donnée en termes d'intégrales de Chen itérées (équivalent aux noyaux de Volterra) et nous retrouvons alors l'approche algébrique de M. Fliess avec les séries formelles non commutatives. En utilisant des algorithmes relatifs aux arbres et des correspondances avec des chemins, nous pouvons donner des algorithmes beaucoup plus efficaces pour le calcul des coefficients de chaque intégrale itérées. Aussi, nous pouvons introduire naturellement combinatoirement des approximants rationnels des solutions et retrouver ainsi des approximants déjà connus.

8. Combinatoire et série formelle non-commutative

Nous avons déjà mentionné l'apparition des séries non commutatives en automatique non linéaire, associée à l'expansion en intégrales itérées de la solution d'une équation différentielle en régime forcé. A partir de considérations d'informatique fondamentale, (automates reconnaissant des langages formels), M.P. Schützenberger avait introduit la notion de séries non commutatives reconnaissables et algébriques. Une méthodologie, qu'il avait appelé DSV, consiste à expliquer l'algébricité de série génératrice algébrique d'objets combinatoires en construisant des codages (bijections) entre ces et des mots d'un certain langage algébrique généré par une grammaire non ambiguë. Avec M. Delest, nous avons développé en [6] cette méthodologie pour le monde des polyominos sur réseau carré (équivalents aux animaux de la physique statistique) et avons résolu en particulier le problème longtemps ouvert du dénombrement des polyominos convexes. Avec M.Bousquet-Mélou, nous avons introduit en [15] un q-analogue de cette méthode formelle, en liaison avec la théorie des empilements de pièces.

9. Informatique discrète: structures de données et analyse d'algorithmes

Avec J.Françon et J.Vuillemin, nous avons introduit des bases combinatoires pour la représentation et l'étude des structures de données en informatique. En particulier, nous avons introduit en [3] la notion de structure «pagode», comme un moyen efficace de représenter la structure de donnée appelée file de priorité. Nous avons commencé à l'époque les premières études de la notion de «coût intégré» sur une séquence aléatoire d'opération primitives, ce qui conduira quelques années plus tard à la théorie des «histoires de fichiers» de J.Françon, P.Flajolet, J.Vuillemin et le calcul du coût intégré grâce à la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux et des fractions continues, chaque structure de données classique, correspondant à une famille classique de polynômes orthogonaux de Scheffer.

J'ai découvert récemment que la combinatoire sous-jacente au calcul du coût intégré des pagodes, était exactement celle de l'algèbre de Hopf des arbres binaires introduit par Loday et Ronco. Il est possible alors d'introduite un «jeu de taquin» sur les arbres binaires, analogue au jeu de taquin de M.P.Schützenberger sur les tableaux de Young et de retrouver le produit de Loday-Ronco.

10. Informatique graphique: synthèse d'images d'arbres et paysages et analyse de structures ramifiées en physique des fractals

Avec Arquès, Eyrolles et Janin, Nous avons développé des algorithmes combinatoires pour la synthèse d'images d'arbres et paysages [13]. Notre méthodologie est basé sur l'analyse de Horton-Strahler des arbres binaires, cette analyse fut introduite en Hydrogéologie pour l'étude morphologique des bassins fluviaux. Le paramètre «nombre de Strahler» d'un arbre binaire est réapparu en informatique comme le nombre minimum de registres pour calculer une expression arithmétique. Nous avons introduit une nouvelle notion, appelée «matrice de ramification» pour toute structure arborescente, qui est à la base de nos algorithmes de synthèse d'images . Ces idées ont été utilisée par des radiologues américains dans l'étude des galactogrammes mammaires pour la détection de certaine maladies, et je les ai utilisé avec J.Vannimenus pour l'analyse de certaines structures fractales en physique (digitation visqueuse, DLA, etc). Notre analyse donne des informations morphologiques pertinentes sur ces structures arborescentes, autres que les classiques dimensions fractales.

Enfin, la combinatoire des nombres de Strahler est très riche et profonde. Dans un travail en interaction avec Don Knuth, j'ai introduit la notion de «système de Tour de Kepler» (certains empilements de dominos sur des cylindres emboîtés) ayant la même distribution que celle des nombres de Strahler.

11. Biologie Moléculaire

Avec M. Vauchaussade de Chaumont [7], nous avons résolu le problème posé par M. Waterman: trouver la distribution du paramètre «complexité» pour les structures secondaires de molécules du type ARN. Ce paramètre intervient dans le calcul de l'énergie de la molécule afin de prédire la structure secondaire à partir de la structure primaire. De manière surprenante dans cette étude apparaît à nouveau la distribution du du paramètre «nombre de Strahler» des arbres binaires (voir §10).

12. Recherches actuelles: PASEP et le projet MARS: «Physique combinatoire: autour des matrices à signes alternants et la conjecture de Razumov-Stroganov»

J'ai introduit en [20] un nouvel objet, appelé «tableau alternatif» dans la combinatoire des permutations. Cet objet est équivalent aux tableaux de permutations («permutation tableaux») introduits par A. Postnikov, L. Williams, E. Stengrimsson, en relation avec des considérations de géométrie algébrique (total positivité sur les Grassmaniennes), mais présente l'avantage d'être symétrique en ligne et colonne. Le modèle PASEP («partially symmetric exclusion process») est le modèle standard des physiciens pour l'étude des systèmes dynamiques loin de l'équilibre. J'ai donné une étude combinatoire de ce modèle avec ces tableaux alternatifs et une interprétation des probabilités stationnaires, en relation avec le «matrix Ansatz» de Derrida, Evans, Hakim, Pasquier.

Egalement en [20], j'ai montré que l'on peut construire une bijection entre ces tableaux alternatifs et les permutations, d'une manière tout à fait analogue à la construction de la correspondance RSK (voir §6) selon la méthodologie de S.Fomin interprétant la relation de commutation UD=DU+I par des opérateurs agissant sur les diagrammes de Young. Ici j'introduit des opérateurs vérifiant la commutation du matrix Ansatz DE=ED+E+D; ces opérateurs sont inspirés des «histoires de fichiers» de la structure dictionnaire en informatique (voir §9) et en liaison avec la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux (q-Laguerre) (voir § 4).

J'introduit un «cellular Ansatz». Ces deux constructions à partir d'opérateurs en sont deux exemple, et je donne une extension possible avec 4 opérateurs pour les célèbres objets appelés matrices à signes alternants, et qui sont au coeur de la conjecture de Razumov-Sroganov sur les chaînes de spin quantiques (modèle de Heisenberg XXZ pour le paramètre delta -1/2). C'est le thème du projet ANR Blanc «MARS» que je dirige depuis 2006 et qui est un sujet très chaud et actif aussi bien chez les combinatoristes que les physiciens.

Vulgarisation et Histoire des mathématiques

Récemment, j'ai travaillé sur l'oeuvre combinatoire de Leonhard Euler (article en cours), ce qui a donné lieu à une «conférence-spectacle» à la BNF en Mars 2007, dans le cadre du cycle de conférence «un texte, un mathématicien» de la SMF. En partant d'une lettre de Euler à Goldbach, je montre comment cette lettre contient en germe la combinatoire moderne, le rapport entre ses grands traités classiques «Introductio in analysin infinitorum», «Institutiones calculi differentialis», «Institutiones calculi integralis» et la combinatoire et la physique théorique d'aujourd'hui.

Cette «conférence-spectacle» à la BNF était «jouée» avec deux violonistes et une conteuse, tous les quatre membres de l'association Cont'Science que nous avons créée pour la vulgarisation des mathématiques et plus généralement de la science.

(voir le site de l'association: http://web.me.com/xgviennot/Cont_Science).

Les résultats de mes recherches ont fait l'objet de centaines de conférences invitées, communications et colloquia dans diverses institutions dans les pays suivant:s:
Allemagne, Angleterre, Australie, Autriche, Canada, Chine, Chili, Croatie, Danemark, Espagne, France, Inde, Indonésie, Israël, Islande, Italie, Portugal, Russie,, Suède, Suisse, Singapour, USA, Venezuela.