Xavier
exemplaire historique

UNE THEORIE COMBINATOIRE DES

POLYNOMES ORTHOGONAUX GENERAUX

PAR

Gérard Viennot

Université de Bordeaux I, France

Notes de conférences données au

Département de mathématiques et d'informatique

Université du Québec à Montréal

Septembre - octobre 1983

C.P. 8888, Succursale A

Montréal, Québec

Canada, H3C3P8

Table des matières

Introduction

Depuis quelques années, la théorie classique des polynômes orthogonaux fait l'objet d'un regain d'attention par les combinatoristes.

Des modèles combinatoires sont maintenant connus pour chacune des familles suivantes de polynômes: Hermite, Laguerre, Charlier, Meixner, Jacobi (en particulier Gegenbauer, Legendre, Tchebychef), Krawtchouk, Hahn. Ces modèles proposent des structures finies (permutation, endofonctions, arborescences, couplages,...) interprétant les coefficients de ces polynômes. Si les polynômes dépendent de certains paramètres, les objets combinatoires sont values par ceux-ci. Dans un premier temps, il s'agit alors de redémontrer combinatoirement les identités classiques satisfaites par ces polynômes, en explicitant des bijections ou des relations entre ces différentes structures finies. Toute une "géométrie" combinatoire de ces polynômes (et aussi des fonctions spéciales) est en cours d'élaboration par différentes écoles, notamment à Cambridge (M.I.T.), en Californie (La Jolla), en Lotharingie (Erlangen, Strasbourg), au Québec (Montréal) et à Vienne. Le lecteur se reportera à l'article de synthèse de Foata [19] présenté au Congrès International des Mathématiciens à Varsovie en 1983 où il trouvera une bibliographie très complète sur tous ces travaux.

La théorie présentée dans ce mémoire est développée dans une autre direction.

D'une part nous traitons les polynômes orthogonaux quelconques. Nous proposons des structures finies (chemins valués) permettant de démontrer combinatoirement des théorèmes classiques valables pour tous les polynômes orthogonaux. Par exemple: l'équivalence entre l'orthogonalité et la classique récurrence à trois termes, ou encore l'équivalence avec les développements en fractions continuées du type Jacobi-Stieltjes.

D'autre part, lorsque nous traitons des familles particulières de polynômes, les objets associés interprètent plutôt la matrice inverse de la matrice formée par les coefficients de ces polynômes. Le point de vue adopté ici est, dans un certain sens, le dual de celui adopté dans les travaux évoqués ci-dessus.

Le point de départ de notre travail est l'interprétation combinatoire de l'orthogonalité des polynômes. Dans les traités classiques, l'orthogonalité est définie par une certaine mesure $d\psi$ sur un intervalle $[a,b]$. Plus précisément, on considère le produit scalaire suivant:

(1) $$\langle P,Q\rangle = \int_a^b P(x)Q(x)d\psi.$$

Ce produit scalaire entre polynômes est entièrement défini par les moments

(2) $$\mu_n = \int_a^b x^n\, d\psi$$

Il est curieux de constater que les moments de certains polynômes orthogonaux classiques sont des suites de nombres très classiques de la combinatoire. Nous nous sommes donc attachés d'abord à l'interprétation combinatoire des moments. Les polynômes orthogonaux associés sont définis par rapport à la fonctionnelle linéaire f, déterminée par

(3) $$f(x^n) = \mu_n.$$

Nous ne faisons pas référence à une mesure du type (2) pour réaliser (3). C'est le point de vue adopté par Chihara [7] dès le début de son livre, ou aussi celui adopté par Draux [11] dans son mémoire dans lequel il appelle de tels polynômes des polynômes orthogonaux formels.

Pour traiter les polynômes rothogonaux généraux, nous considérons deux suites $\{b_n\}_{n\geq 0}$ et $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ d'un anneau commutatif $\mathbb{K}$. Ces suites permettent de définir les polynômes $P_n(x)$ par la classique récurrence à trois termes suivantes

(4) $$P_{n+1}(x) = (x-b_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x).$$

Nous commençons alors par démontrer combinatoirement que ces polynômes sont orthogonaux pour une certaine suite de moments $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$. Ces moments sont interprétés par certains chemins, appelés chemin de Motzkin, valués par les coefficients b_n et λ_n, considérés dans un premier temps comme variables formelles. Les preuves bijectives relatives aux propriétés classiques des polynômes orthogonaux généraux feront intervenir certaines propriétés, purement combinatoires de ces chemins.

Lorsque les coefficients b_n et λ_n ont des valeurs particulières, les moments sont alors interprétés comme nombre d'histoires. Cette notion fut introduite par Françon [15] en liaison avec des considérations informatiques de calcul du coût moyen d'une structure de données.

Ces histoires permettent de construire des objets combinatoires interprétant les moments. Intuitivement, le chemin de Motzkin correspond à une séquence d'opérations primitives construisant un objet combinatoire. La valuation correspond au nombre de façons d'effectuer cette opération primitive.

L'interprétation des moments comme chemins values, ainsi que les constructions combinatoires avec histoires correspondant à des familles particulières de polynômes, ne sont pas nouvelles. Elles sont dues respectivement à Flajolet [14] et Françon, Viennot [20]. Ce mémoire repose sur ces deux articles et en constitue en quelque sorte la suite logique. Nous avons complètement repris ces études antérieures afin de rendre ce travail "self-contained". Beaucoup de nouveautés sont présentées, notamment les preuves bijectives des théorèmes classiques sur les fractions continuées et polynômes orthogonaux utilisés par Flajolet dans [14], ainsi qu'une utilisation systématique de la correspondance entre permutations et ce qui est appelé ici "histoires de Laguerre" due à Françon, Viennot [20]. Par exemple les moments de la table II-1 (page II-45) sont obtenus par cette correspondance. Notons que ces moments sont fondamentaux pour notre étude. Il est surprenant qu'ils soient rarement calculés ou écrits de manière explicite dans les traités classiques sur les polynômes orthogonaux.

Comme nous l'avions dit au début, une certaine dualité apparait tout au long de ce travail. C'est par exemple la "dualité" entre chemins de Motzkin interprétant les moments et chemins de Favard interprétant la récurrence linéaire (4), (voir figure 12, page IV-26). Cette dualité entre chemins est liée au théorème de Jacobi sur les déterminants. Pour des valeurs particulières des coefficients b_n et λ_n, cette dualité devient celle existant entre nombres de Stirling de première et seconde espèce, ou encore celle entre fonctions symétriques élémentaires et homogènes. La dualité est aussi celle entre les polynômes orthogonaux et les polynômes verticaux du chapitre III relatifs à la matrice inverse des coefficients. Dans ce même chapitre, nous donnons les séries génératrices exponentielles des polynômes orthogonaux de Sheffer, à savoir les polynômes d'Hermite, Laguerre, Charlier, Meixner 1ère et 2ème

Lorsque les coefficients b_n et λ_n ont des valeurs particulières, les moments sont alors interprétés comme nombre d'histoires. Cette notion fut introduite par Françon [15] en liaison avec des considérations informatiques de calcul du coût moyen d'une structure de données.

Ces histoires permettent de construire des objets combinatoires interprétant les moments. Intuitivement, le chemin de Motzkin correspond à une séquence d'opérations primitives construisant un objet combinatoire. La valuation correspond au nombre de façons d'effectuer cette opération primitive.

L'interprétation des moments comme chemins values, ainsi que les constructions combinatoires avec histoires correspondant à des familles particulières de polynômes, ne sont pas nouvelles. Elles sont dues respectivement à Flajolet [14] et Françon, Viennot [20]. Ce mémoire repose sur ces deux articles et en constitue en quelque sorte la suite logique. Nous avons complètement repris ces études antérieures afin de rendre ce travail "self-contained". Beaucoup de nouveautés sont présentées, notamment les preuves bijectives des théorèmes classiques sur les fractions continuées et polynômes orthogonaux utilisés par Flajolet dans [14], ainsi qu'une utilisation systématique de la correspondance entre permutations et ce qui est appelé ici "histoires de Laguerre" due à Françon, Viennot [20]. Par exemple les moments de la table II-1 (page II-45) sont obtenus par cette correspondance. Notons que ces moments sont fondamentaux pour notre étude. Il est surprenant qu'ils soient rarement calculés ou écrits de manière explicite dans les traités classiques sur les polynômes orthogonaux.

Comme nous l'avions dit au début, une certaine dualité apparait tout au long de ce travail. C'est par exemple la "dualité" entre chemins de Motzkin interprétant les moments et chemins de Favard interprétant la récurrence linéaire (4), (voir figure 12, page IV-26). Cette dualité entre chemins est liée au théorème de Jacobi sur les déterminants. Pour des valeurs particulières des coefficients b_n et λ_n, cette dualité devient celle existant entre nombres de Stirling de première et seconde espèce, ou encore celle entre fonctions symétriques élémentaires et homogènes. La dualité est aussi celle entre les polynômes orthogonaux et les polynômes verticaux du chapitre III relatifs à la matrice inverse des coefficients. Dans ce même chapitre, nous donnons les séries génératrices exponentielles des polynômes orthogonaux de Sheffer, à savoir les polynômes d'Hermite, Laguerre, Charlier, Meixner 1ère et 2ème classe. Ces séries sont définies par deux fonctions s(t) et q(t) interprétées en termes d'histoires. En se reportant à la relation III-12, la dualité prend maintenant la forme de l'inversion de Lagrange, associant à la série (q(t) la série réciproque $q^{<-1>}(t)$.

Un des intérêts des preuves bijectives des propriétés bien connues sur les polynômes orthogonaux généraux est que certaines de ces bijections s'étendent sans effort à d'autres structures combinatoires plus compliquées. Des résultats nouveaux apparaissent, en liaison avec certains travaux récents en combinatoire comme par exemple les polynômes de couplages des graphes qui font l'objet du chapitre VI. Des fractions continuées dites arborescentes y apparaissent. Nous avons pu ainsi résoudre des problèmes posés très récemment par les physiciens (voir Viennot [41]).

Il s'avère que plusieurs bijections de ce travail, démontrant des théorèmes fort différents sont en fait très voisine les unes des autres. Nous aurions pu unifier toutes ces preuves, au prix d'un certain formalisme, en introduisant la notion d'<u>empilement de pièces</u> sur un ensemble donné. Cette notion fut introduite par Dulucq , Viennot [12] afin de simplifier les preuves bijectives de Foata [17], [18] sur certains théorèmes classiques d'algèbre matricielle, en liaison avec le monoïde de commutation de Cartier, Foata [6]. La dernière conférence à Montréal, qui n'est pas reproduite ici, avait pour objet de présenter un théorème sur les empilements, avec preuve bijective, donnant à la fois comme cas particulier une bonne dizaine de propositions: preuve bijective de l'orthogonalité (proposition I-17 et corollaire I-19), inversion de la matrice des coefficients (théorème III-1), équivalence avec les fractions continuées (proposition V-2, relation V-(27), relation V-(40), certaines propositions de Godsil sur les polynômes de couplages des graphes (proposition VI-13), un théorème sur les convergents des fractions continuées arborescentes (proposition VI-7), le théorème classique donnant l'inverse d'une matrice (voir Foata [17], le "théorème maître" de MacMahon [6] (avec une bijection supplémentaire donnant le théorème de Jacobi [18]), le théorème de Cayley-Hamilton [35], enfin le théorème d'Andrews [1] interprétant les inverses des identités de Rogers-Ramanujan (relations V-(47), V-(48). Tout ce travail sera rédigé ultérieurement.

Nous n'avons pas inclus dans ce mémoire les applications possibles de la théorie bijective présentée ici.

Une application possible de certains aspects du chapitre VI et du modèle des empilements de pièces, est en physique statistique, avec la résolution combinatoire du modèle des animaux dirigés introduit par les physiciens en 1982. Plusieurs conjectures avaient été formulées. Elles sont résolues, pratiquement sans calculs, grâce aux bijections présentées ici, et à des extensions de celles-ci aux empilements. Une synthèse est présentée par l'auteur dans l'exposé [41] au séminaire N. Bourbaki.

Une autre application possible est en liaison avec la biologie moléculaire, pour des problèmes de dénombrement de structures secondaires d'acides nucléiques monobrins (ARN, ARNT, ARNM,...) selon un paramètre appelé complexité. Des polynômes de Tchebychef généralisés y apparaissent. On se reportera au résumé [38] d'un article à venir.

Remarquons que ces deux applications à la physique statistique et la biologie moléculaire ont fait l'objet de deux exposés au séminaire de combinatoire de l'UQAM, enregistrés sur bande magnétoscopique.

Une autre application possible est en Informatique, avec le calcul du coût moyen d'une structure de données intégré sur une séquence aléatoire d'opérations primitives. C'est la théorie mise en place par Flajolet, Françon, Vuillemin (voir par exemple [15]). A chaque structure de donnée est associée une famille de polynômes orthogonaux: Tchebychef pour les piles, Hermite pour les files de priorités, Laguerre pour les dictionnaires, certains polynômes de Meixner pour les listes triées, etc...

Cette théorie présente certaines analogies avec celle des processus de vie et de mort de Karlin, McGregor. Les probabilités jouent le rôle de nombre de possibilités d'effectuer une opération primitive. Dans les deux cas, ce sont des spécifications particulières des valuations formelles b_n et λ_n des chemins de Motzkin présentés dans ce travail.

La théorie des histoires présentées au chapitre II peut être généralisée, en vue de la résolution combinatoire (c'est-à-dire le calcul des coefficients des noyaux de Volterra) des équations différentielles non linéaires en régime forcé. Ce travail est lié à celui de Fliess et ses élèves (voir par exemple [16]) et fera l'objet d'un autre mémoire par l'auteur. Là encore, la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux de Sheffer présentée dans les chapitres II et III constitue un bon point de départ.

Nous aurions aussi aimé dans ce travail développer plus longuement une théorie combinatoire des approximants de Padé. Nous y faisons allusion dans les chapitre IV et V.

Certains aspects de ce travail ont été présentés dans différents exposés oraux: au séminaire lotharingien, à Oberwolfach, à l'Université de Californie à San Diego.

Je remercie vivement Pierre Leroux d'avoir rendu possible la rédaction de ce travail en m'invitant à l'exposer à Montréal. Ces notes ont été écrites pendant l'automne québécois, au sein de l'ambiance chaleureuse de l'équipe combinatoire de l'Université du Québec à Montréal. Je remercie aussi tous les participants (notamment F. Bergeron, C. Blais, P. Bouchard, J. Bourret, Y. Constantineau, H. Décoste G. et J. Labelle, P. Leroux, V. Strehl) pour de nombreuses discussions, leur intérêt passionné, et aussi leur belle endurance pour les six exposés qui sont devenus en fait six après-midi bien remplies.

Enfin, je remercie les organismes suivants qui ont contribué financièrement à ma visite à Montréal et à la publication de ces notes: la Fondation de l'Université du Québec à Montréal, le F.C.A.C. (EQ1608) du Gouvernement du Québec et le C.R.S.N.G. (A5660) du Canada.